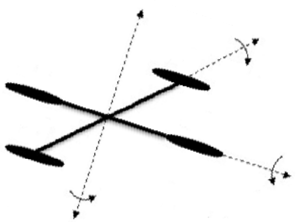
8장 Matrice -4



- 고유값과 고유벡터

정의 8.13 **고유값과 고유벡터**

$\mathbf{A}$가 $n \times n$ 행렬이라 하자. 선형계(연립방정식)

$$\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K} \tag{1}$$

의 0이 아닌 해벡터 $\mathbf{K}$가 존재하면, 수 λ를 $\mathbf{A}$의 **고유값**(eigenvalue)이라 하고, 그 해벡터 $\mathbf{K}$를 고유값 λ에 대응하는 **고유벡터**(eigenvector)라고 한다.

$$\boxed{\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}} \longrightarrow \boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0}$$

예제 1 고유벡터의 증명

$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$는 행렬

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

의 고유벡터임을 검증하라.

풀이 곱셈 **AK**를 취하면 다음과 같다.

$$\mathbf{AK} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overset{\text{고유값}}{\overset{\downarrow}{(-2)}}\mathbf{K}$$

앞줄과 정의 8.13에서 $\lambda = -2$가 **A**의 고유값임을 알 수 있다. ❑

예제 2 고유값과 고유벡터 구하기

다음 행렬의 고유값과 고유벡터를 구하라.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0 \quad \text{또는} \quad \lambda(\lambda+4)(\lambda-3) = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -4,\ \lambda_3 = 3}$$

$\lambda_1 = 0$일 때

$$(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{-6R_1+R_2 \\ R_1+R_3}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{13}R_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{-2R_2+R_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$k_1 = -\frac{1}{13}k_3,\ k_2 = -\frac{6}{13}k_3$ $\quad$ $k_3 = -13$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -4$에 대해

$$(\mathbf{A} + 4\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{R_3 \\ R_{13}}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{\substack{-6R_1+R_2 \\ -5R_1+R_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{\substack{-\frac{1}{9}R_2 \\ -\frac{1}{8}R_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{\substack{-2R_2+R_1 \\ -2R_2+R_3}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$k_1 = -k_3,\ k_2 = 2k_3$

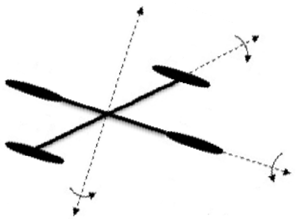
$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

마지막으로 $\lambda_3=3$ 에 대해서 Gauss-Jordan 소거법은

$$(\mathbf{A}-3\mathbf{I}|\mathbf{0})=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 2 & 1 & 0\\ 6 & -4 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -4 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{행 연산}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

을 주는데 따라서 $k_1=-k_3$ 이고 $k_2=-3/2$ 이고, $k_3=-2$ 를 선택하면 세 번째 고유벡터

$$\mathbf{K}_3=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$$



예제 3 고유값과 고유벡터 구하기

다음 행렬의 고유값과 고유벡터를 구하라.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

풀이 특성방정식

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)^2 = 0$$

으로부터 $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$는 중복도 2인 고유값이다. 2×2 행렬의 경우에는 Gauss-Jordan 소거법을 이용할 필요가 없다. $\lambda_1 = 5$에 대응하는 고유벡터를 구하기 위해 연립방정식 $(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}|\mathbf{0})$과 동치인

$$\begin{aligned} -2k_1 + 4k_2 &= 0 \\ -k_1 + 2k_2 &= 0 \end{aligned}$$

로부터 명백히 $k_1 = 2k_2$이다. 따라서 $k_2 = 1$로 택하면, 유일한 고유벡터 $\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$을 얻는다. ❑

예제 4 **고유값과 고유벡터 구하기**

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}9&1&1\\1&9&1\\1&1&9\end{pmatrix}$$ 의 고유값과 고유벡터를 구하라.

풀이 특성방정식

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}9-\lambda&1&1\\1&9-\lambda&1\\1&1&9-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-11)(\lambda-8)^2=0$$

으로부터 $\lambda_1=11$과 $\lambda_2=\lambda_3=8$은 중복도 2인 고유값임을 알 수 있다.

$\lambda_1=11$에 대해서는 Gauss-Jordan 소거법으로부터

$$(\mathbf{A}-11\mathbf{I}|\mathbf{0})=\left(\begin{array}{ccc|c}-2&1&1&0\\1&-2&1&0\\1&1&-2&0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

을 얻고, 따라서 $k_1=k_3$이고 $k_2=k_3$이다. $k_3=1$이면

을 얻고, 따라서 $k_1=k_3$이고 $k_2=k_3$이다. $k_3=1$이면

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

이다. 이제 $\lambda_2=8$에 대해서는

$$(\mathbf{A}-8\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

이다. 방정식 $k_1+k_2+k_3=0$에서 두 변수는 임의로 자유롭게 택할 수 있다. 한편으로 $k_2=1$, $k_3=0$을 택하고 다른 한편으로 $k_2=0$, $k_3=1$을 택하면 단 하나의 고유값에 대응하는 2개의 일차독립인 고유벡터

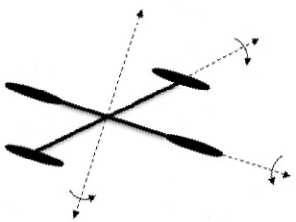
$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 그리고 } \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

을 얻는다. ❑

정리 8.24 **복소 고유값과 고유벡터**

$\mathbf{A}$가 실수 원소를 갖는 정방행렬이라고 하자. $\lambda=\alpha+i\beta$, $\beta \neq 0$이 $\mathbf{A}$의 복소 고유값이면, 그것의 켤레 $\overline{\lambda}=\alpha-i\beta$도 $\mathbf{A}$의 고유값이다. $\mathbf{K}$가 λ에 대응하는 고유벡터이면, 그것의 켤레 $\overline{\mathbf{K}}$는 $\overline{\lambda}$에 대응하는 고유벡터이다.

$$\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{K}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{K}} \quad \text{또는} \quad \mathbf{A}\overline{\mathbf{K}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{K}}$$



예제 5 복소 고유값과 고유벡터

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}$의 고유값과 고유벡터를 구하라.

풀이 특성방정식은

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}6-\lambda & -1\\ 5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-10\lambda+29=0$$

이다. 2차 방정식의 공식으로부터 $\lambda_1=5+2i$ 와 $\lambda_2=\bar{\lambda}_1=5-2i$ 를 얻는다.

이제 $\lambda_1=5+2i$ 에 대해서는

$$\begin{aligned}(1-2i)k_1-\qquad\quad k_2&=0\\ 5k_1-(1+2i)k_2&=0\end{aligned}$$

을 풀어야 한다. $k_2=(1-2i)k_1^*$ 이므로, $k_1=1$ 을 택하면 고유벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1-2i\end{pmatrix}$$

정리 8.24 에서 $\lambda_2=\bar{\lambda}_1=5-2i$ 에 대응하는 고유벡터는

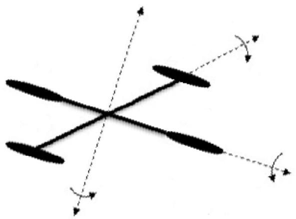
$$\mathbf{K}_2=\bar{\mathbf{K}}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1+2i\end{pmatrix}$$

임을 알 수 있다. □

정리 8.25 **삼각행렬과 대각행렬**

위 삼각행렬, 아래 삼각행렬과 대각행렬의 고유값은 주대각원소들이다.

증명) Report



- 행렬의 거듭제곱

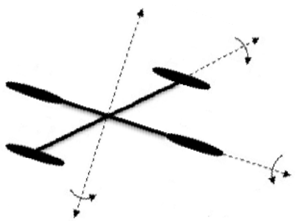
정리 8.26 Cayley–Hamilton 정리

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$는 자신의 특성방정식을 만족시킨다.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -1 \text{ 과 } \lambda_2 = 2 \longrightarrow \mathbf{A}^2 = 2\mathbf{I} + \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^3 = 2\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A} + (2\mathbf{I} + \mathbf{A}) = 2\mathbf{I} + 3\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^4 = 6\mathbf{I} + 5\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}^5 = 10\mathbf{I} + 11\mathbf{A}$$
$$\mathbf{A}^6 = 22\mathbf{I} + 21\mathbf{A}$$



$$\mathbf{A}^6 = 22\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 21\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 84 \\ -21 & 85 \end{pmatrix}$$

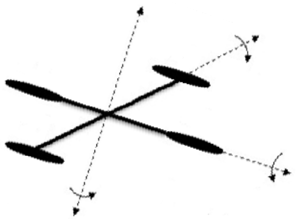
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \lambda^2 = \lambda + 2 \longrightarrow \lambda_1 = -1 \text{과 } \lambda_2 = 2$$

$$\mathbf{A}^m = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} \quad \text{그리고} \quad \lambda^m = c_0 + c_1\lambda$$

$$\begin{aligned} (-1)^m &= c_0 + c_1(-1) \\ 2^m &= c_0 + c_1(2) \end{aligned}$$

$$c_0 = \tfrac{1}{3}[2^m + 2(-1)^m], \; c_1 = \tfrac{1}{3}[2^m - (-1)^m]$$

$$\mathbf{A}^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}[-2^m + 4(-1)^m] & \frac{4}{3}[2^m - (-1)^m] \\ -\frac{1}{3}[2^m - (-1)^m] & \frac{1}{3}[2^{m+2} - (-1)^m] \end{pmatrix}$$



예제 1 **3×3 행렬의 $\mathbf{A}^m$**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ 의 $\mathbf{A}^m$을 계산하라.

풀이 $\mathbf{A}$의 특성방정식은 $-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2=0$ 또는 $\lambda^3=-2+\lambda+2\lambda^2$이고 고유값은 $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, 그리고 $\lambda_3=2$이다. 앞의 논의로부터 다음 두 식은 같은 계수를 가짐을 알 수 있다.

$$\mathbf{A}^m = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 \quad \text{그리고} \quad \lambda^m = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 \tag{7}$$

마지막 식에서 차례로 $\lambda=-1$, $\lambda=1$, $\lambda=2$로 놓음으로써 세 개의 미지수가 있는 세 개의 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} (-1)^m &= c_0 - c_1 + c_2 \\ 1 &= c_0 + c_1 + c_2 \\ 2^m &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 \end{aligned} \tag{8}$$

$$c_0 = \tfrac{1}{3}[3 + (-1)^m - 2^m]$$
$$c_1 = 2[1 - (-1)^m]$$
$$c_2 = \tfrac{1}{6}[-3 + (-1)^m + 2^{m+1}]$$

$\mathbf{A}^2$을 계산한 후, 이 계수들을 (7)의 처음 식에 대입하고, 얻어진 행렬의 원소를 간단히 하면 그 결과는 다음과 같다.

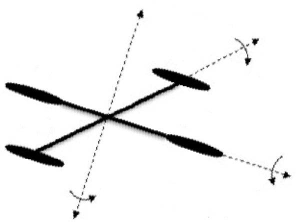
$$\mathbf{A}^m = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}[9 - 2^{m+1} - (-1)^m] & \frac{1}{3}[2^m - (-1)^m] & \frac{1}{6}[-9 + 2^{m+1} + 7(-1)^m] \\ 1 - 2^m & 2^m & 2^m - 1 \\ \frac{1}{6}[3 - 2^{m+1} - (-1)^m] & \frac{1}{3}[2^m - (-1)^m] & \frac{1}{6}[-3 + 2^{m+1} + 7(-1)^m] \end{pmatrix}$$

예를 들어 $m=10$ 이면

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{pmatrix} -340 & 341 & 341 \\ -1023 & 1024 & 1023 \\ -341 & 341 & 342 \end{pmatrix}$$

■ **역행렬 구하기** $\mathbf{A}$가 정칙행렬이라고 가정하자. $\mathbf{A}$가 자신의 특성방정식을 만족시킨다는 사실은 $\mathbf{A}^{-1}$을 $\mathbf{A}$의 거듭제곱들의 일차결합으로 계산하는 데 이용될 수 있다. 예를 들어 정칙행렬 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}$은 $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}-2\mathbf{I}=0$을 만족시킴을 알고 있다. 단위행렬에 대해 풀면 $\mathbf{I}=(1/2)\mathbf{A}^2-(1/2)\mathbf{A}$가 주어진다. 마지막 결과에 $\mathbf{A}^{-1}$을 곱하면 $\mathbf{A}^{-1}=(1/2)\mathbf{A}-(1/2)\mathbf{I}$이 된다. 다시 말해서 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 2\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix} \tag{9}$$



- 직교 행렬

정의 8.14 **대칭행렬**

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$가 $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$일 때 **대칭행렬**(symmetric matrix)이라 한다. 여기서 $\mathbf{A}^T$는 $\mathbf{A}$의 전치행렬이다.

정리 8.27 **실고유값**

$\mathbf{A}$가 실수 원소를 갖는 대칭행렬이라 하면, $\mathbf{A}$의 고유값은 실수이다.

$$\mathbf{AK}=\lambda\mathbf{K} \quad \longrightarrow \quad \overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{AK} = \lambda\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K}$$

$$\overline{\mathbf{AK}} = \overline{\lambda\mathbf{K}}$$

$$\mathbf{A}=\overline{\mathbf{A}}$$

$$0 = (\bar{\lambda} - \lambda)\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K}$$

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{K}} = \bar{\lambda}\overline{\mathbf{K}} \quad \longrightarrow \quad \overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{AK} = \bar{\lambda}\overline{\mathbf{K}}^T\mathbf{K}$$

정리 8.28 **직교 고유벡터**

$\mathbf{A}$가 $n\times n$ 대칭행렬이라 하자. 서로 다른 고유값들에 대응하는 고유벡터들은 서로 직교한다.

$$\mathbf{AK}_1 = \lambda_1\mathbf{K}_1 \quad \text{그리고} \quad \mathbf{AK}_2 = \lambda_2\mathbf{K}_2$$

$$\mathbf{K}_1^T\mathbf{AK}_2 = \lambda_1\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 \qquad \mathbf{K}_1^T\mathbf{AK}_2 = \lambda_2\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2$$

$$0 = \lambda_1\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 - \lambda_2\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 \quad \text{또는} \quad 0 = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$이므로 $\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 = 0$

예제 1 직교 고유벡터

대칭행렬 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$의 고유값은 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$과 $\lambda_3=-2$이다. 대응하는 고유벡터는 차례로

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

이다. 모든 고유값은 서로 다르므로, 다음을 얻는다.

$$\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_2 = (1 \;\; 0 \;\; 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

$$\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_3 = (1 \;\; 0 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0$$

$$\mathbf{K}_2^T\mathbf{K}_3 = (-1 \;\; 1 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = 0 \quad \square$$

정의 8.15 **직교행렬**

$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^T$이면 $n \times n$ 정칙행렬 $\mathbf{A}$를 **직교행렬**(orthogonal matrix)이라 한다.

정리 8.29 **직교행렬의 판단기준**

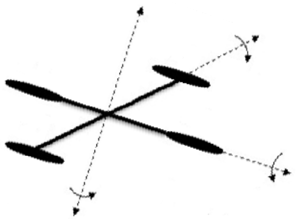
$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$가 직교일 필요충분조건은 그 열 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$이 정규직교 집합인 것이다.

부분 증명 $\mathbf{A}$가 열 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n$을 갖는 $n \times n$ 직교행렬이라 가정하자. 따라서 $\mathbf{A}^T$의 행은 $\mathbf{X}_1^T, \mathbf{X}_2^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T$이다. 그러나 $\mathbf{A}$가 직교이므로 $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\mathbf{I}$, 즉

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_n \\ \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \mathbf{X}_n^T\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_n^T\mathbf{X}_2 & \cdots & \mathbf{X}_n^T\mathbf{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

이다. 행렬의 상등의 정의로부터 다음이 얻어진다.

$$\mathbf{X}_i^T\mathbf{X}_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{그리고} \quad \mathbf{X}_i^T\mathbf{X}_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$



이것은 직교행렬의 열은 n개의 벡터로 된 정규직교 집합을 이룬다는 것을 의미한다. ❑

예제 2 직교행렬

(a) $n \times n$ 단위행렬 $\mathbf{I}$는 직교행렬이다. 예를 들어 3×3 단위행렬

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

의 경우에는 $\mathbf{I}^T = \mathbf{I}$이고 $\mathbf{I}^T\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{I} = \mathbf{I}$임을 알고 있다.

(b) 행렬

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

는 직교이다. 이것을 알아보기 위해서는 $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$만을 증명하면 된다.

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ❑

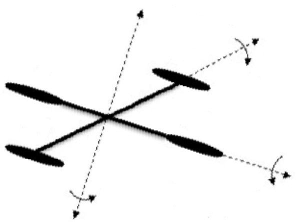
예제 3 직교행렬 만들기

예제 1에서 주어진 대칭행렬의 고유벡터

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

은 직교임을 증명하였다. 이제 이 고유벡터들의 놈은

$$\|\mathbf{K}_1\| = \sqrt{\mathbf{K}_1^T\mathbf{K}_1} = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{K}_2\| = \sqrt{\mathbf{K}_2^T\mathbf{K}_2} = \sqrt{3}, \quad \|\mathbf{K}_3\| = \sqrt{\mathbf{K}_3^T\mathbf{K}_3} = \sqrt{6}$$



이다. 따라서 벡터들의 정규직교 집합은

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

이다. 이들 벡터를 열로 사용하면, 다음과 같은 직교행렬을 얻는다.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ 임을 검증해 보라. ❑

예제 4 Gram-Schmidt 과정의 사용

대칭행렬 $\mathbf{A}$ 에 대해서

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

고유값은 $\lambda_1=\lambda_2=-9$, 그리고 $\lambda_3=9$ 이다. 8.8 절에서와 같이 처리하면, $\lambda_1=\lambda_2=-9$ 에 대해서

$$(\mathbf{A} + 9\mathbf{I}|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{행 연산}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

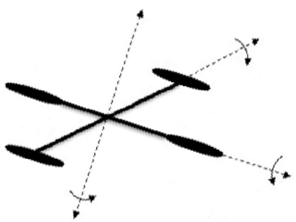
이다. 마지막 행렬로부터 $k_1=-\frac{1}{4}k_2+\frac{1}{4}k_3$ 이다. $k_2=1$, $k_3=1$ 을 선택하고 난 이후에 $k_2=-4$, $k_3=0$ 을 선택하면, 다음과 같은 고유벡터를 차례로 얻는다.

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 그리고 } \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

그리고 $\lambda_3=9$에 대해서

$$(\mathbf{A}-9\mathbf{I}|0)=\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & 4 & -4 & 0\\ 4 & -17 & -1 & 0\\ -4 & -1 & -17 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\text{행 연산}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

위 식은 $\mathbf{K}_3=\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$가 세 번째 고유벡터임을 나타낸다.



정리 8.28에 따라서, 벡터 $\mathbf{K}_3$는 $\mathbf{K}_1$과 $\mathbf{K}_2$에 대해서 직교한다. 그러나 중복되는 고유값 $\lambda_1=-9$에 해당하는 고유벡터, $\mathbf{K}_1$과 $\mathbf{K}_2$는 $\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{K}_2=-4 \neq 0$이므로 직교가 아니다.

$\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2\}$ 집합을 직교 집합으로 변환하기 위하여 Gram−Schmidt 직교화 과정(7.7절 참조)을 사용한다. $\mathbf{V}_1=\mathbf{K}_1$이라고 하자. 그러면

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{K}_2 - \left(\frac{\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_1}\right)\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

이다. 집합 $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}$는 직교 벡터의 집합이다(검증하라). 더구나 집합 $\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{K}_3\}$는 고유벡터의 직교 집합이다. 놈 $\|\mathbf{V}_1\|=\sqrt{2}$, $\|\mathbf{V}_2\|=3$, 그리고 $\|\mathbf{K}_3\|=3\sqrt{2}$를 사용하면, 다음과 같은 정규직교 벡터집합을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$